

Rozwiązania zadań (etap indywidualny)

Zadanie 1. Trzy liczby

Udowodnij, że jeśli liczby spełniają warunek $abc = 1$, to $\frac{1}{1+a^2b} + \frac{1}{1+bc^2} = 1$.

Dowód:

$$\frac{1}{1+a^2b} + \frac{1}{1+bc^2} = \frac{1}{abc+a^2b} + \frac{1}{abc+bc^2} = \frac{1}{ab(c+a)} + \frac{1}{bc(a+c)} = \frac{c+a}{abc(c+a)} = \frac{1}{abc} = 1$$

Zadanie 2. Orzechy dziadka

Dziadek rozdał swoim wnuczkom orzechy. Pierwszemu dał jeden orzech i $\frac{1}{10}$ pozostałych orzechów, drugiemu dwa orzechy i $\frac{1}{10}$ pozostałych orzechów, trzeciemu 3 orzechy i $\frac{1}{10}$ pozostałych orzechów itd. aż orzechy skończyły się. Okazało się, że każdy z wnuków dostał tę samą liczbę orzechów. Oblicz ilu jest wnuczków i po ile orzechów dostał każdy z nich?

Rozwiązanie. Niech n oznacza liczbę orzechów. Pierwszy wnuczek dostał $1 + \frac{n-1}{10} = \frac{n+9}{10}$. Dla pozostałych wnuczków zostało $n - \frac{n+9}{10} = \frac{9n-9}{10}$. Zatem drugi wnuczek otrzymał $2 + \frac{1}{10} \left(\frac{9n-9}{10} - 2 \right) = \frac{171+9n}{100}$ i musiał otrzymać tyle orzechów co pierwszy, stąd $\frac{n+9}{10} = \frac{171+9n}{100}$. Otrzymujemy $n = 81$. Zatem było dziewięciu wnuczków i każdy z nich otrzymał 9 orzechów.

Zadanie 3. Suma kwadratów

Udowodnij, że suma kwadratów pięciu kolejnych liczb naturalnych nie może być kwadratem liczby naturalnej.

Dowód: $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2)$

Kwadraty liczb naturalnych przy dzieleniu przez 5 dają resztę 0, 1, 4, a zatem liczba $(n^2 + 2)$ nie może być podzielna przez 5. Rozpatrywana suma kwadratów jest podzielna przez 5, ale nie jest podzielna przez 25, zatem nie może być kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 4. Bądź jak Pitagoras

W pewnym trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych wynosi l , a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość h . Oblicz pole tego trójkąta.

Rozwiązanie Niech x, y oznaczają długości przyprostokątnych, wysokość $CD = h$. Przeciwprostokątna AB ma zatem długość

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 2xy} = \sqrt{l^2 - 4S}. \text{ Jednocześnie pole trójkąta jest równe } S = \frac{1}{2} CD \cdot AB = \frac{1}{2} h \sqrt{l^2 - 4S}. \text{ Z równania } S = \frac{1}{2} h \sqrt{l^2 - 4S} \text{ otrzymujemy } S = \frac{1}{2} h (\sqrt{l^2 + h^2} - h).$$

Zadanie 5. Liczba 10-cyfrowa

Czy istnieje liczba 10-cyfrowa, zapisana różnymi cyframi, mająca tę własność, że wykreślając dowolne sześć jej cyfr zawsze uzyskamy liczbę złożoną? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie. Np. 1397245680. Jeśli przy wykreślaniu pozostawimy jedną z sześciu ostatnich cyfr to powstała liczba czterocyfrowa będzie parzysta lub podzielna przez 5. Jeśli wykreślimy ostatnie sześć cyfr, to uzyskana liczba (czyli 1397) jest podzielna przez 11.