Szkice rozwiązań, 11 kwietnia 2025 roku

Zadanie 1. Wielokrotności dziewięciu
Ile jest liczb n należących do zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \dots, 2025\}$, dla których liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 9? Uzasadnij swoją odpowiedź.
Rozwiązanie:
$n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)$. Łatwo zauważyć, że liczba $n^2 + 1$ nie dzieli się przez 3, natomiast liczby $n + 1$ i $n - 1$ nie mogą jednocześnie dzielić się przez 3. Zatem $n + 1$ dzieli się przez 9 albo $n - 1$ dzieli się przez 9. Liczb postaci $n + 1$, które dzielą się przez 9 jest 225, a także liczb postaci $n - 1$, które dzielą się przez 9 jest 225. Zatem wszystkich szukanych liczb jest 450.

Zadanie 2. Układ równań
Niech x, y będą liczbami dodatnimi takimi, że $x > y$ oraz

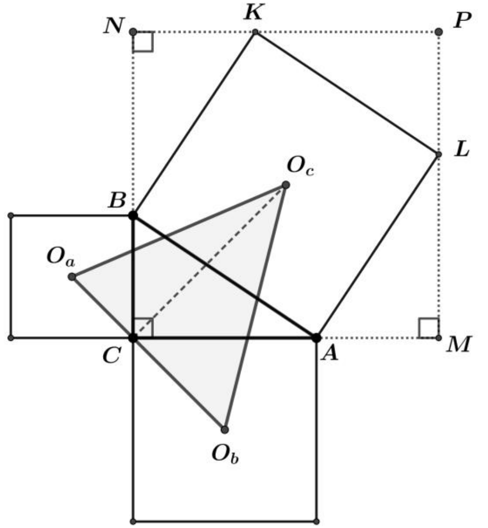
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \text{ i } \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} = 5$$

Oblicz x.
Rozwiązanie:
Oznaczmy $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} = a$ oraz $\sqrt{y+2} + \sqrt{y} = b$. Z założenia $x > y$ mamy $a > b$. Wtedy $\sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \frac{2}{a}$ oraz $\sqrt{y+2} - \sqrt{y} = \frac{2}{\sqrt{y+2}+\sqrt{y}} = \frac{2}{b}$.
Otrzymujemy $a + b = 9$ oraz $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$. Stąd $2 \cdot \frac{a+b}{ab} = 1$, czyli $ab = 18$.
Rozwiązaniem układu jest $a = 6, b = 3$. Zatem $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} = 6$.
Ostatecznie $\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})-(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{2} = \frac{6-\frac{1}{3}}{2} = \frac{17}{6}$
Zatem $x = \frac{289}{36}$.

Zadanie 3. Liczba 24-cyfrowa
Czy liczbę 24-cyfrową 202520252025202520252025 można zapisać w postaci sumy pięciu liczb składających się jedynie z cyfr 0 i 5? Odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie:
Niech $a = 505\ 05\ 05\ 05\ 05\ 05\ 05\ 05\ 05\ 05\ 05$
oraz $b = 5\ 0005\ 0005\ 0005\ 0005\ 0005$.
Łatwo sprawdzić, że $2025\ 2025\ 2025\ 2025\ 2025\ 2025 = a + a + a + a + b$.

Zadanie 4. Prosta i parabola
Prosta przecina parabolę $y = x^2$ w punktach, których pierwsze współrzędne są równe x_1, x_2, zaś oś OX w punkcie o pierwszej współrzędnej x_3, gdzie $x_1, x_2, x_3 \neq 0$. Udowodnij, że $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.
Rozwiązanie:
Możemy przyjąć, że równanie prostej ma postać $y = k(x - x_3)$, gdzie $k \neq 0$ natomiast liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania $x^2 = k(x - x_3)$, czyli równania $x^2 - kx + kx_3 = 0$. Ze wzorów Viete'a mamy:
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{k}{kx_3} = \frac{1}{x_3}$.

Zadanie 5. Trójkąt i kwadraty
Na zewnątrz boków trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości a i b skonstruowano trzy kwadraty. Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez środki symetrii tych kwadratów.
Rozwiązanie:
Niech $|BC| = a$, $|AC| = b$. Odcinek $|O_aO_b| = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Rzutując prostopadle punkty K, L na proste CB, CA wraz z punktem P otrzymujemy czworokąt $CMPN$ (patrz rysunek).



Czworokąt $CMPN$ jest kwadratem o boku długości $a + b$. Środkiem symetrii tego kwadratu jest punkt O_c. Zatem wysokość trójkąta $O_aO_bO_c$ jest równa $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.
Pole trójkąta $O_aO_bO_c$ jest równe $\frac{1}{2}\frac{a+b}{\sqrt{2}}\frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{(a+b)^2}{4}$.