Szkice rozwiązań.
WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY im. prof. Stefana Banacha ETAP SZKOLNY
TORUŃ, czwartek 13 marca 2025 roku

Zadanie 1. Liczba 1000-cyfrowa

Jaka jest największa liczba cyfr, którą należy wykreślić z liczby 1000-cyfrowej $N = 202520252025 \ldots 2025$, aby suma pozostałych cyfr była równa 2025 ? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

Liczba N składa się z 250 bloków, składających się z liczb czterocyfrowych 2025. Suma cyfr tej liczby jest równa $9 \cdot 250 = 2250$. Tak więc suma cyfr, które należy wykreślić wynosi $2250 - 2025 = 225$. Aby wykreślić największą liczbę cyfr należy wykreślić: wszystkie 0 (jest ich 250) , 110 cyfr 2 i jedną cyfrę 5. Trzeba więc wykreślić 361 cyfr.

Zadanie 2. Układ równań

Wyznacz wszystkie trójki liczb rzeczywistych a, b, c spełniające układ równań:

$$\begin{cases} ab = a + b \\ bc = b + c \\ ca = c + a \end{cases}$$

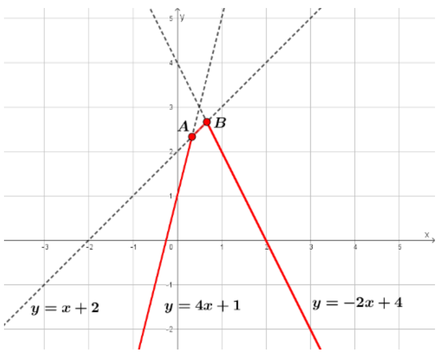
Rozwiązanie:

Zauważmy, że $ab - bc = ac$, czyli $b(a - c) = a - c$. Stąd $b = 1$ lub $a = c$. Jeśli $b = 1$, to $a = a + 1$, co jest sprzeczne. Analogicznie otrzymujemy, że $a = b$. Jeśli $a = b = c$, to otrzymujemy równanie $a^2 = 2a$, więc $a = 0$ lub $a = 2$. Ostatecznie rozwiązaniami są $(0, 0, 0), (2, 2, 2)$.

Zadanie 3. Najmniejsza wartość największa

Funkcja $f(x)$ oznacza najmniejszą z liczb: $4x + 1, x + 2, -2x + 4$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz największą wartość funkcji $f(x)$.

Rozwiązanie:



Wykres funkcji $y = f(x)$ zaznaczono kolorem czerwonym. Funkcja ta w punkcie B osiąga wartość największą. Rozwiązując układ równań: $y = x + 2$, $y = -2x + 4$ otrzymujemy $B = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Ostatecznie największa wartość funkcji f jest równa $2\frac{2}{3}$.

Zadanie 4. Jedno równanie trzy niewiadome

Wyznacz wszystkie trójki liczb (x, y, z) spełniające równanie $\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{y^2-2y+3} = z^2 + 1$.

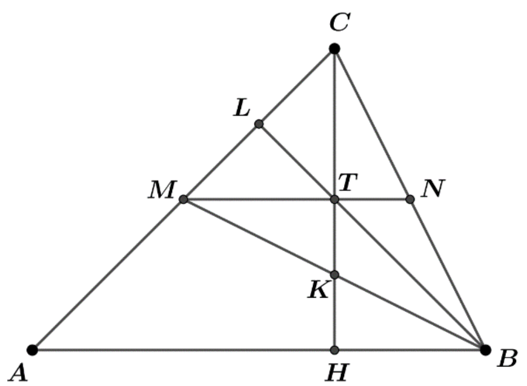
Rozwiązanie:

Zauważmy, że $a^2 \pm 2a + 3 = (a \pm 1)^2 + 2 \geq 2$ dla każdej liczby rzeczywistej $a \in \mathbb{R}$, przy czym równość zachodzi dla $a = \mp 1$. Każda z liczb $\frac{1}{x^2+2x+3}, \frac{1}{y^2+2y+3}$ jest nie większa od $\frac{1}{2}$. Zatem lewa strona równania zawsze przyjmuje wartości nie większe od 1. Prawa strona równania przyjmuje wartości nie mniejsze od 1, więc obie strony równania są równe 1. Jedyną trójką liczb spełniającą to równanie jest $(-1, 1, 0)$.

Zadanie 5. Wysokość i środkowa w trójkącie

W trójkącie ABC wysokość CH dzieli środkową BM na połowy. Udowodnij, że ze środkowych trójkąta BCM można zbudować trójkąt prostokątny.

Rozwiązanie:



Niech środkowe BL, CK i MN trójkąta BCM przecinają się w punkcie T. Zauważmy, że $|BT| = \frac{2}{3}|BL|, |CT| = \frac{2}{3}|CK|, |MT| = \frac{2}{3}|MN|$. Zatem wystarczy udowodnić, że z odcinków BT, CT, MT można skonstruować trójkąt prostokątny. Jest to trójkąt CMT, gdyż MN jest linią środkową trójkąta ABC, $MN \perp CH$ oraz $|CM| = 2|LT| = |BT|$.