

**WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. prof. Stefana Banacha**  
**(dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych)**  
**Zadania I etapu na rok szkolny 2016/17**

**Zadanie 1. Liczba rozwiązań**

Ile rozwiązań w liczbach całkowitych, spełniających nierówności  $|x| < 2017$  i  $|y| < 2017$  ma równanie:  $(x - y)^2 = x + y$ ? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 2. Odcinki w trapezie**

Dany jest trapez  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$ , w którym  $\angle BAD = \angle ABC = 60^\circ$  oraz  $|CD| < |BC|$ . Na boku  $BC$  tego trapezu wybrano punkt  $E$  tak, że  $|EB| = |CD|$ . Udowodnij, że  $|BD| = |AE|$ .

**Zadanie 3. Podzielność przez trzy**

Wyznacz wszystkie liczb naturalne  $k$  takie, że liczba  $k^{k+1} + (k+1)^k$  dzieli się przez 3.

**Zadanie 4. Symbole arytmetyczne i nawiasy**

Po lewej stronie równości  $\frac{1}{a} \frac{1}{a} \frac{1}{a} \frac{1}{a} \frac{1}{a} = (a+1)(a-1)$  wstaw nawiasy lub symbole operacji arytmetycznych w taki sposób, aby równość była prawdziwa dla każdej liczby  $a \neq 0$ .

**Zadanie 5. Równanie i nierówność**

Liczby  $a, b, c$  i  $d$  spełniają warunek  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ . Uzasadnij, że  $(a+2)(b+2) \geq cd$ .

**Zadanie 6. Liczba wymierna**

Dane są dwie liczby  $a$  i  $b$  takie, że liczba  $\frac{a-b}{a+b}$  jest wymierna ( $a \neq -b$  i  $2017a \neq b$ ) Udowodnij, że liczba  $\frac{2017a+b}{2017a-b}$  również jest wymierna.

**Zadanie 7. Szachownica**

Uzasadnij, że szachownicę o wymiarach 10 na 10 nie można rozciąć na prostokąty o wymiarach 1 na 4.

**Zadanie 8. Układ równań**

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} xy = x + y \\ yz = y + z \\ zx = z + x \end{cases}$$

**WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. prof. Stefana Banacha**  
**(dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych)**  
**Zadania I etapu na rok szkolny 2016/17**

**Zadanie 9. Intrygujące liczby**

Liczbę naturalną nazywamy intrygującą, jeśli suma jej cyfr jest liczbą pierwszą. Ile maksymalnie, wśród pięciu kolejnych liczb naturalnych, może być liczb intrygujących? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 10. Trójkąty w prostokącie**

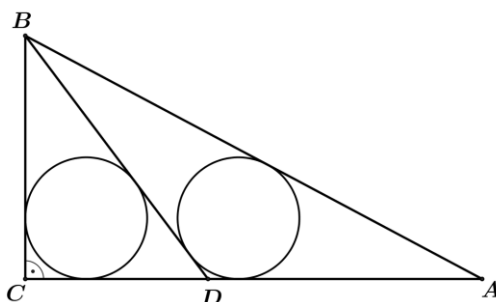
Punkty  $E$  i  $F$  leżą odpowiednio na bokach  $BC$  i  $CD$  prostokąta  $ABCD$ , przy czym trójkąt  $AEF$  jest równoboczny. Punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $AF$ . Wykaż, że trójkąt  $BCM$  również jest równoboczny.

**Zadanie 11. Owoce w paczkach**

Mając do dyspozycji 20 gruszek, 30 bananów, 40 pomarańczy i 50 mandarynek tworzymy paczki składające się z trzech różnych owoców. Ile maksymalnie można utworzyć takich paczek? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 12. Okręgi wpisane.**

W trójkąt prostokątny  $DBC$  oraz w trójkąt  $DAB$  wpisano okręgi o promieniu 2. Oblicz długość odcinka  $CA$  wiedząc, że odcinek  $BC$  ma długość 8.



Rozwiązania zadań sprawdzają nauczyciele matematyki oceniając każde w skali od 0 do 5 punktów. Zestawienie wyników z punktacją za każde zadanie prosimy o przesłanie na adres:

**Zespół Szkół nr 10 im. prof. Stefana Banacha**  
**87-100 Toruń, plac św. Katarzyny 9**  
**tel. (0-56) 622-27-33**

lub na:

**e-mail: tmaslow@onet.eu**

do dnia 10 marca 2017 roku. Finał wojewódzki dla około 100 autorów najlepszych prac odbędzie się 31 marca i 1 kwietnia 2017 roku w Zespole Szkół nr 10 w Toruniu. W trakcie tych dni odbędą się zawody indywidualne (w piątek) i zespołowe (w sobotę). W zawodach zespołowych uczestniczą szkoły, które mogą wyłonić (spośród zakwalifikowanych do drugiego etapu) 3-osobową drużynę. Każda szkoła może być reprezentowana przez co najwyżej dwie drużyny oraz co najwyżej dziesięciu uczniów.